Exercice 1

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$, avec a et b des nombres réels :

$$z = -\frac{2}{1 - i\sqrt{3}}, \quad u = \frac{3 - i}{(1+i)(1-2i)}, \quad v = \frac{5 + i\sqrt{2}}{1+i}, \quad w = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2.$$

Exercice 2

Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

c) $z^2 + 3(1-i)z + 8i = 0$

d) $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$

e) $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$

Exercice 3

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $z_\theta := \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C}$. Vérifier que les formules d'addition pour sin et cos sont équivalentes aux affirmations :

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha \cdot z_\beta, \qquad z_{\alpha-\beta} = z_\alpha / z_\beta.$$

Exercice 4

Écrire sous les trois formes (algébrique, trigonométrique et exponentielle) les nombres complexes suivants :

a) Nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

b) Nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$

Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

a) $(3+2i)(1-3i)$

b) $2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

c) $2e^{\frac{\pi}{3}i} / 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

Exercice 6

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad \textit{et} \quad u = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}.$$

Exercice 7

En calculant $(\sqrt{3}+i)(1+i)$, déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 8

Soit $\zeta = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ et posons $\alpha = \zeta + \zeta^4$, $\beta = \zeta^2 + \zeta^3$.

a) Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha \cdot \beta$.

b) En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est racine du polynôme $4x^2 + 2x - 1$.

c) Conclure en donnant une formule explicite pour $\cos(\frac{2\pi}{5})$!

Exercice 9

Déterminer les racines ...

a) quatrièmes de 1

b) quatrièmes de -1

c) cinquièmes de $32i$

d) cinquièmes de $1+i$

e) quatrièmes de $8(1+\sqrt{3}i)$

f) quatrièmes de $-119+120i$

Exercice 10

a) Déterminer les solutions complexes à l'équation $u^4 = -4$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0.$$